MA 1 – písemné cvičení – určitý integrál 2

Výpočet určitého integrálu – další příklady („trochu obtížnější“)

(1.) $\int_{-1}^{1} \arcsin^2 x \, dx$: 1) je (R) i (N) integrál, neboť fce $f(x) = \arcsin^2 x$ je spojitá v $\langle -1, 1\rangle$

2) $$\int_{-1}^{1} \arcsin^2 x \, dx = 2 \int_{0}^{1} \arcsin^2 x \, dx$$, neboť $\arcsin^2 x$ je funkce sudá v $\langle -1,1\rangle$;

3) $$\int_{0}^{1} \arcsin^2 x \, dx =$$ zkusíme substituci

$$\left| \begin{array}{l} \arcsin x = t \\ \quad x = \sin t \; (= g(t)) \\ x \in \langle 0,1\rangle \\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \to t = 0 \\ x = 1 \to t = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$g'(t) = \cos t > 0 \;\; v \; (0, \tfrac{\pi}{2})$$

(a spojitá)

lze tedy užít věty o substituci $\Big| =$

$$\underset{VS}{=} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t \, dt \underset{(Dú 10)}{=} \left[t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Tedy: $$\int_{-1}^{1} \arcsin^2 x \, dx = 2 \int_{0}^{1} \arcsin^2 x \, dx = \frac{\pi^2}{2} - 4$$

(3.) $$\int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx = \int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{2x}{2x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx \overset{*}{=}$$

(i) f je spojitá v $(3,+\infty)$,
$\langle 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\rangle \subset (3,+\infty)$,
tj. integrál existuje (R) i (N)
(a rovnají se)

(ii) zkusíme substituci
$x^2-9 = t \ (\equiv g(x))$
$g'(x) = 2x > 0$ v $\langle 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\rangle$
$x^2 = t+9$

$x = 2\sqrt{3} \rightarrow t = 3$
$x = 3\sqrt{2} \rightarrow t = 18-9 = 9$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{2}\int_3^9 \frac{dt}{(t+9)\sqrt{t}}\,dt = \text{„další substituce"}$$

$\sqrt{t} = y \quad (\equiv \varphi(t))$
$t = y^2 \quad \left(\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$
$dy = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$
$t=3 \rightarrow y=\sqrt{3}$; $t=9 \rightarrow y=3$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dy}{y^2+9} = \frac{1}{9}\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{1+\left(\frac{y}{3}\right)^2}\,dy = \frac{1}{3}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{3}\right)\right]_{\sqrt{3}}^{3} =$$

(**)

$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \left(= \frac{\pi}{36}\right)$$

A možná, když se podíváme po těchto dvou substitucích na integrál
$\int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{2x}{x^2 \cdot 2\sqrt{x^2-9}}\,dx \overset{*}{=}$, tak „uvidíme" už i substituci „najednou":
$t = \sqrt{x^2-9}\ (\equiv g(x))$, pak $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ /
$x^2 = t^2+9$, meze: $x = 2\sqrt{3} \rightarrow t = \sqrt{3}$
$x = 3\sqrt{2} \rightarrow t = 3$

(a pak) $\overset{*}{=} \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{t^2+9}\,dt$, což je integrál v (**).

(4.) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx$

1) opět integrál je (R) i (N), neboť integrand je funkce spojitá v $\langle 0,\pi\rangle$;

2) kdybychom chtěli „přečíst" integrál (jako (N)) užitím „doporučené substituce" $\operatorname{tg} x = t$ (neboť $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$), pak „chybí" bod $x=\frac{\pi}{2}$!

tedy buď musíme primitivní funkci, určenou v $(0,\frac{\pi}{2})$ a v $(\frac{\pi}{2},\pi)$ „slepit" v bodě $x=\frac{\pi}{2}$,

nebo, užijeme aditivity integrálu, a pak (díky π-periodicitě fce $\cos^2 x$, stačí určit primitivní funkci v $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$:

$$\int \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx \;=\; \left|\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ \cos^2 t = \frac{1}{1+t^2} \end{array}\right| = \int \frac{1}{1+\frac{3}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$
$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$= \int \frac{1}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)+c \underset{t=\operatorname{tg}x}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}x\right)+c$$

Tato primitivní fce je primitivní funkcí k $\frac{1}{1+3\cos^2 x}$ i v $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$,

a tedy:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \left(\frac{\pi}{4}-0\right)+\left(0-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$= \Big[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}x}_{\to+\infty \text{ pro } x\to\frac{\pi}{2}-}\big)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}x}_{\to-\infty \text{ pro } x\to\frac{\pi}{2}+}\big)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

Dvě poznámky k tomuto příkladu:

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx$$ – (souhlasí s výsledkem, ale lze ukázat pouze substitucí)

$\cos^2 x = \cos^2(\pi - x)$ a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{c} \pi - x = t \\ x = \pi - t \\ dx = -dt \\ x = \frac{\pi}{2} \to t = \frac{\pi}{2} \\ x = \pi \to t = 0 \end{array} \right| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1+3\cos^2(\pi - t)}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 t}\,dt$$, což jsme chtěli ukázat, tedy „stačí" spočítat jen tento integrál

2. Kdybychom provedli substituci $\operatorname{tg} x = t$ v určitém integrálu (se změnou mezí), pak $x = 0 \to t = 0$, ale $x = \frac{\pi}{2} \to t \to \infty$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{4+t^2}\,dt =$$ jako Newtonův integrál (i když jste toto nepobírali, zmíněno na přednášce to bylo)

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) - \operatorname{arctg} 0\right] = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

(u výpočtu „naší" primitivní funkce pro $x \to \frac{\pi}{2}$ – toto byla vlastně limita vnější funkce) a pokud bychom chtěli „vytvořit" primitivní funkci v celém $\langle 0,\pi\rangle$, tak (opět slepením v bodě $x=\frac{\pi}{2}$) (konstantu v $\langle 0,\frac{\pi}{2})$ lze volit $C=0$)

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}x\right), & x\in\langle 0,\frac{\pi}{2})\\ \frac{\pi}{4}, & x=\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}x\right)+\frac{\pi}{2} & v\ (\frac{\pi}{2},\pi\rangle,\end{cases}$$

a pak $$\int_0^{\pi}\frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx \underset{(N)}{=} \Big[F(x)\Big]_0^{\pi} = 0+\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

<u>Užití věty o substituci a vlastnosti R-integrálu</u>

① Je-li $f\in R(-a,a)$, $a>0$, f lichá $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

a: $$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \underset{\text{substituce}}{=} \left|\begin{array}{l} x=-t\\ dx=-dt\\ x=-a\to t=a\\ x=0\to t=0\end{array}\right| = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt =$$

ale $f(-t)=-f(t)$

$$= -\int_0^a f(t)\,dt$$ $\left(= -\int_0^a f(x)\,dx\right.$ – „na označení integrační proměnné nezáleží" $\left.\right)$

② $f\in R(-a,a)$, f sudá $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ –

– zřejmé z ① neboť platí $f(-t)=f(t)$ v $(-a,a)$

3. Je-li f spojitá a sudá v $\langle -a,a\rangle$, $a>0$, pak primitivní funkce je v $(-a,a)$ lichá:

Je-li f spojitá funkce v $\langle -a,a\rangle$, pak primitivní fce k $f(x)$ v $(-a,a)$ je (volíme za „počátek" integrace $x=0$)

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \quad x\in(-a,a)$$

vezmeme

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt \underset{\text{subst.}}{=} \left|\begin{array}{l} t=-y\,,\ y=-t \\ dt=-dy\,, \\ \text{meze: } t=0 \to y=0 \\ \qquad\ \ t=-x \to y=x \end{array}\right| =$$

$$= -\int_0^x f(-y)\,dy = -\int_0^x f(y)\,dy\,,$$ neboť dle předpokladu je $f(-y)=f(y)$ v $\langle -a,a\rangle$.

tedy platí: $F(-x) = -F(x)$, F je lichá v $(-a,a)$.

5. a) Máme ukázat (bez výpočtu integrálu), že $\int_{-1}^{2}(e^x-e^{-x})\,dx>0$:

$f(x)=e^x-e^{-x}$, pak $f(-x)=e^{-x}-e^x=-f(x)$,
tedy f je fce lichá v R, a pak $\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})\,dx=0$;

$$\text{tedy} \int_{-1}^{2}(e^x-e^{-x})\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})\,dx}_{=0} + \int_{1}^{2}(e^x-e^{-x})\,dx > 0$$

neboť: $e^x-e^{-x}>0$ v $\langle 1,2\rangle \Rightarrow \int_1^2(e^x-e^{-x})\,dx>0$
$(e^x>e^{-x})$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx = 0$ $(a>0)$ – opět máme ukázat bez výpočtu integrálu: stačí pro $a>1$, pro $a=1$ je $\int_1^1 f = 0$ (def.)

(a pro $0<a<1$ to plyne z $a>1$) integrál existuje (N i R) – fce $\frac{\ln x}{x}$ je spojitá v $\langle \frac{1}{a}, a\rangle$ (uvaž. $a>1$)

$$a \quad \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{\ln x}{x}\,dx + \int_{1}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$$a \quad \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{\ln x}{x}\,dx \underset{\text{subst.}}{=} \left|\begin{array}{ll} \frac{1}{x} = t & \underline{\text{meze:}} \\ x = \frac{1}{t}\ (\equiv g(t)) & x=1 \to t=1 \\ & x=\frac{1}{a} \to t=a \\ g'(t) = -\frac{1}{t^2}\ (\text{nebo } dx = -\frac{1}{t^2}dt) & \end{array}\right|$$

$$= -\int_{a}^{1} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t^2}\,dt = -\int_{a}^{1} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\,dt = -\int_{a}^{1} -\frac{\ln t}{t}\,dt$$

$$= \int_{a}^{1} \frac{\ln t}{t}\,dt = -\int_{1}^{a} \frac{\ln t}{t}\,dt\,, \text{ tedy}$$

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx = +\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{\ln x}{x}\,dx + \int_{1}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx = -\int_{1}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx + \int_{1}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx = \underline{0}$$

4. f spojitá a sudá v $\langle -a,a\rangle$ $(a>0)$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx=\int_0^a f(x)\,dx$

---

1) fce $\dfrac{f(x)}{e^x+1}$ je spojitá v $\langle -a,a\rangle$, tedy $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$ ex. (R) i (N), stejně i $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$.

2) $$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx \overset{*}{=}$$

píšeme t místo x („nevadí")

$$\overset{(*)}{=}\int_0^a\frac{f(t)}{1+e^t}\cdot e^t\,dt+\int_0^a\frac{f(t)}{e^t+1}\,dt=$$ („součet integrálů")

$$=\int_0^a\frac{f(t)}{e^t+1}\,(e^t+1)\,dt=\underline{\int_0^a f(t)\,dt}\quad(\text{cbd})$$

a v prvním integrálu budeme substituovat $x=-t$:

$$(*)\quad\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=-t \Leftrightarrow t=-x\\ dx=-dt\\ x=-a\to t=a\\ x=0\to t=0\end{array}\right|=-\int_a^0\frac{f(-t)}{e^{-t}+1}\,dt=$$

$(f(-t)=f(t))$

$$=\int_0^a\frac{f(t)}{1+e^t}\cdot e^t\,dt$$ (opět, nezáleží na proměnné za $\int_0^a$)

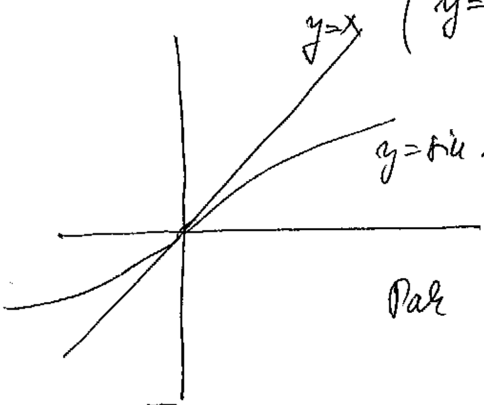
Několik příkladů na aplikace R-integrálu:

(Výpočet obsahu rovinné omezené oblasti, objemu rotačních těles, délky „grafu“ funkce)

1. Máme určit obsah omezené rovinné oblasti ω, kde ω je ohraničená grafy funkcí $y = x^2$, $y = x\sin x$ a přímkou $x = \frac{\pi}{2}$.

v $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je $x\sin x \leq x^2$, neboť $\sin x \leq x$ v $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$

($y=x$ je tečnou v $[0,0]$ ke grafu $y=\sin x$) (platí v $\langle 0,+\infty)$)



a tedy i $x\sin x \leq x^2$ v $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$:

$$\text{Pak}\quad S(\omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - x\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \frac{\pi^3}{24} - 1 \; (>0)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}};$$

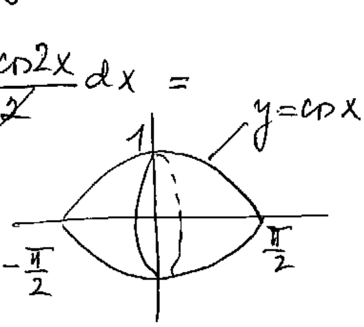
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \underset{PP}{=} \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x, & u = -\cos x \\ v = x, & v' = 1 \end{array} \right| = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$$

$$= 0 + \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

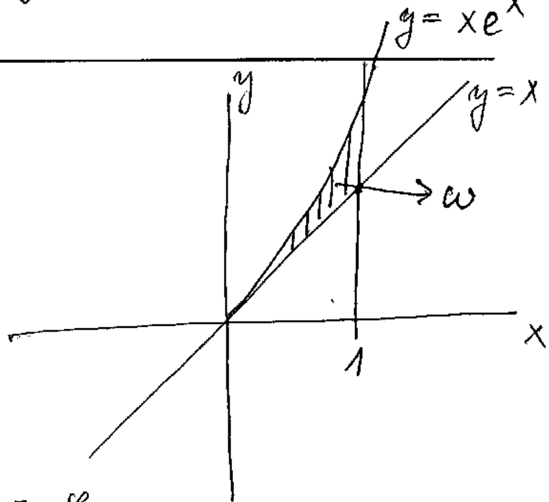
2a) Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací kolem osy x oblasti $\omega = \{[x,y];\ x\in\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle,\ 0 \leq y \leq \cos x\}$:

$$V(\Omega) = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \cancel{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{\cancel{2}}\,dx =$$

$$= \pi\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}$$



2b) ? Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací omezené rovinné oblasti ω, která je ohraničena grafy funkcí $y = xe^x$, $y = x$ a přímkou $x = 1$.



Jak „vypadá" oblast ω ?

v $\langle 0,1 \rangle$ je $e^x \geq 1 \quad | \cdot x > 0$

$xe^x \geq x$ pro $x > 0$

$V(\Omega) = V_1 - V_2$, kde

V_1 je objem rotačního tělesa, vytvořeného rotací plochy mezi osou x a grafem $y = xe^x$

a V_2 – objem kuželu o výšce $= 1$ a poloměru základny 1

(vzniklé rotací trojúhelníku, ohraničeného $y = x$, osou x a $x = 1$)

tj. $$V(\Omega) = \pi \int_0^1 (xe^x)^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left(\frac{e^2-1}{4} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\left(= \frac{\pi}{12} (3e^2 - 7) \right)$$

$\pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$ (odpovídá vzorci pro objem kuželu)

$$\int_0^1 (xe^x)^2 dx = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx \underset{pp}{=} \left| \begin{array}{l} u' = e^{2x},\ u = \frac{e^{2x}}{2} \\ v = x^2,\ v' = 2x \end{array} \right| = \left[x^2 \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 x e^{2x} dx =$$

$$\underset{pp}{=} \left| \begin{array}{l} u' = e^{2x},\ u = \frac{e^{2x}}{2} \\ v = x,\ v' = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} e^2 - \left(\left[x \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_0^1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} e^2 - \left[\frac{1}{2} e^2 - \frac{e^2-1}{4} \right] = \frac{e^2-1}{4}$$

3a) Máme určit délku grafu funkce $f(x)=\frac{x^2}{2}$ pro $0\le x\le a$, $a>0$.

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$ pro délku grafu funkce $y=f(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$, která má v $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci $f'(x)$.

Tedy zde: $f'(x)=x$, spojitá v $\langle 0,a\rangle$, tedy

$$l=\int_0^a\sqrt{1+x^2}\,dx \underset{pp}{=} \left|\begin{array}{ll} u'=1, & u=x \\ v=\sqrt{1+x^2}, & v'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{array}\right| =$$

(primitivní funkci $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ jsme počítali, nicméně zopakujme)

$$=\left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^a-\int_0^a\frac{x^2\overset{(+1-1)}{}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^a-\int_0^a\sqrt{1+x^2}\,dx+\int_0^a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx,$$

tedy dostaneme (z rovnice pro $\int_0^a\sqrt{1+x^2}\,dx$):

$$\int_0^a\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1+a^2}+\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^a\right)=$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right)}$$

(užili jsme „také" $\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$ v R

– opět jsme řešili jako příklad výpočtu integrálu neurčitého)

Poznámka: Je „vidět", že výpočet délky grafu vede ke složitějším integrálům – odmocnina z kvadratických výrazů se moc pěkně neintegruje.

3b) Nelze určit délku grafu fce

$$\underline{f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad v \ \langle -1,1 \rangle}$$

Počítejme

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \ \underline{\text{ale jen } x \in (-1,1)} \ !$$

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{(1-x)^2}{1-x^2} = \frac{1-x^2+1-2x+x^2}{1-x^2} = \frac{2(1-x)}{(1-x)(1+x)} =$$

$$= \frac{2}{1+x} \quad v \ (-1,1)$$

Tedy by bylo: $l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+f'^2(x)}dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}} dx =$

$$= \sqrt{2} \cdot 2\left[\sqrt{1+x}\right]_{-1}^{1} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4 \ ,$$

ale tento integrál není integrál Riemannův, neboť funkce $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ není omezená v $(-1,1)$ $\left(\lim_{x \to -1+} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = +\infty\right)$,

ale i Newtonův integrál lze považovat za nevhodný pro délku grafu, i když je „vzorec" odvozen dle „myšlení" Riemanna (pomocí integrálních R-součtů coby aproximace délky „křivky" grafu délkou lomené čáry – viz přednáška)